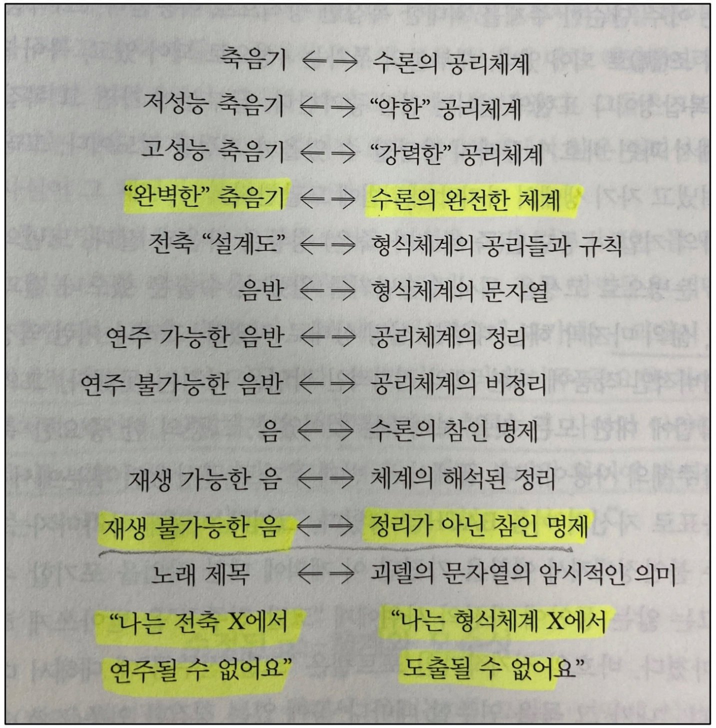
괴델의 "불완전성 정리" 해설

최종 수정: **2025. 5. 21.**

이강룡(**readme.kr**)
유튜브 "올읽쓰"

"겉으로는 수에 관한 내용을 말하면서 또한 '나는 증명될 수 없다'라고도 말하는 공식을 내놓았던 것이다. 이것은 역설처럼 보인다...
이 명제가 진리임은 그 논리체계 바깥에서만 알 수 있다. 체계 내부에서는 증명될 수도, 반박될 수도 없다. 그렇다면 그 체계는 불완전하다."

- 짐 홀트, <아인슈타인이 괴델과 함께 걸을 때>(소소, 2021)



축음기	⟷	수론의 공리체계
저성능 축음기	⟷	"약한" 공리체계
고성능 축음기	⟷	"강력한" 공리체계
"완벽한" 축음기	⟷	수론의 완전한 체계
전축 "설계도"	⟷	형식체계의 공리들과 규칙
음반	⟷	형식체계의 문자열
연주 가능한 음반	⟷	공리체계의 정리
연주 불가능한 음반	⟷	공리체계의 비정리
음	⟷	수론의 참인 명제
재생 가능한 음	⟷	체계의 해석된 정리
재생 불가능한 음	⟷	정리가 아닌 참인 명제
노래 제목	⟷	괴델의 문자열의 암시적인 의미
"나는 전축 X에서 연주될 수 없어요"		"나는 형식체계 X에서 도출될 수 없어요"

불완전성 정리는 한마디로 진리 영역이 우리가 세운 논리 영역보다 훨씬 넓다는 점을 시사한다. 달리 말해서, 우리가 다 판단할 수는 없지만 엄연히 참으로 존재하는 세계가 있다는 깨달음, 그것이 쿠르트 괴델이 도달한 결론이었다.

더글러스 호프스태터가 쓴 <괴델, 에셔, 바흐>(까치, 2017)에 이런 비유가 나온다. 완전한 수론 체계가 존재한다면 그것은 모든 음악을 완벽하게 재생 가능한 축음기(오디오)에 빗댈 수 있다. 그렇지만 아무리 정교하게 만들어진 오디오 장치라 해도 재생 불가능한 음이 있기 마련이다. 모든 음을 완벽히 재생하는 오디오 장치는 이상에 불과하며 실제로는 존재할 수 없다.

다음 문장은 자기 자신을 가리키고 있다.

"이 명제는 증명 불가능하다."

이 문장이 참인 경우와 거짓인 경우를 생각해 보자. 참/거짓을 판별하려면 어떤 내용이 있어야 하는데 이 문장으로 어떻게 참/거짓을 따질 수 있지? 하는 생각이 들 수 있다. 실제 증명 과정에서는 (내용은 똑같지만 다른 방식으로) 내용이 명시되는데, 여기서는 세부 내용은 무시하고 어쨌든 증명 가능하거나 불가능하거나 둘 중 하나일 것이므로 논리적인 형식만 본다. 이 문장을 G라고 하면, 다음처럼 표현할 수 있다.

G: G는 증명 불가능하다.

이 문장 G가 거짓인 경우와 참인 경우를 따져 보자.

거짓이라면? "G는 증명 불가능하지 않다." 즉, "G는 증명 가능하다"는 말이 된다. (당시 논리학에서는 "증명 불가능하지 않다 = 증명 가능하다"라고 봄)

그런데 증명하려고 하는 이 명제 G의 원래 뜻이 뭐냐 하면 <G는 증명 불가능하다>였다. 따라서 "<G는 증명 불가능하다>는 증명 가능하다"라는 말이 된다. 'G는 증명 불가능하다'도 성립하고 'G는 증명 가능하다'도 동시에 성립하는 상황이 벌어진다. 논리 체계에서는 상반된 두 상황이 동시에 참일 순 없다. 따라서 이런 경우는 성립하지 않는다.

참이라면 어떨까? "G는 증명 불가능하다."가 참이므로, 참이면서 증명은 불가능하다. 이것은 모순이 아니다, 단지 불완전할 뿐이다.
여기서 우리는 참의 영역이 증명 영역보다 넓을 것이라고 추론할 수 있다.

"거짓말은 필요없다." vs. "거짓말은 필요하다." 이분법 논리만 가지고서는 둘 다 참이 될 순 없지만, 우리 세계에서는 둘 다 인정해야 할 때가 있다. 삶은 이분법이 지배하는 논리 체계보다 넓고 깊기 때문이다. 인간의 앎 역시 연역과 추론이 지배하는 논리 세계보다 훨씬 더 넓어야 하지 않을까?

"여러분, 선생님이 설명해 줄게요." 초등학교 교실에서 담임선생님이 이렇게 말씀하시는 건 아주 자연스럽다. 무슨 말인지 이해하지 못하는 학생도 없다. 그렇지만 이 문장을 한국어 문법으로 검증하면 자기 자신을 제3자 부르듯 '선생님'이라고 부른 것이니까 맞는 표현이 아닌데, 그렇다고 해서 틀린 표현이라고 단정하기에는 뭔가 확신이 서질 않는다. 문법에 맞는 표현인 "여러분, 제가 설명해줄게요."보다 그 상황에 더 적합한 말이기 때문이다. 아들에게 "내가 해줄게!"보다 "아빠가 해줄게!"라고 말하는 것이 더 효과적인 것처럼 말이다.

혹시 이 문장들이, 문법 규범의 논리적 '옳고/그름' 범주에 얽매이지 않으면서, 문법 규범 바깥의 한국어 논리 체계 어딘가에서 엄연히 올바르게(참으로) 존재하는 그런 표현이기 때문은 아닐까?

1931년 쿠르트 괴델이 "불완전성 정리" 논문*을 발표하기 전까지 수학자들은 완전무결한 수학/논리 체계가 성립 가능하다는 점을 굳게 믿었다. 괴델은 인간이 만든 논리 체계는 완전무결하지 않으며, 참이면서도 증명은 불가능한 명제가 항상 존재한다는 점을 입증했다. 한마디로 인간이 아무리 치밀하게 설계한 체계라 해도 해명할 수 없는 부분이 항상 새로 발견될 수 있다는 뜻이다.

* 논문 제목: 《수학 원리》 및 관련 체계에서 형식적으로 결정될 수 없는 명제에 관하여

소수(prime number, [소쑤]라고 발음함)란 1과 자신만으로 나누어지는 수다. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19... 처럼 끝없이 이어진다. 다음 문장을 보자. "2보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합으로 표현 가능하다."

4는 2와 2의 합이고,
6은 3과 3의 합이다.
8은 3과 5의 합이며,
10은 3과 7의 합이다...

누가 보더라도 참이며 예외가 있을 것 같진 않은데, 증명 방법은 아무도 찾지 못했다. 수학자 골트바흐가 제기한 추측이라고 해서 '골트바흐 추측'(또는 '골드바흐 추측')이라고 불린다. 물론 앞으로 증명될 가능성은 있는데, 여기서는 "불완전성 정리"를 이해하기 위한 비유라고 생각해 주기 바란다.

축구 경기에서 공격수가 슛을 날렸다. 공이 날아가는 방향으로 보면 골문을 한참 빗나가야 하는데, 우연히도 상대편 수비수 등에 맞고 굴절되면서 골이 되었다. 수비수 등의 원래 역할이 있다면, '상대편 골을 돕는 목적'은 아닐 것이다. 그렇지만 결과적으로 골에 기여했고, 골이 되는 과정은 축구의 규칙을 전혀 어기지 않았다. 그저 우연히 그 자리에 있었기에 상황이 절묘하게 맞아떨어졌을 뿐이다.

수들의 속성을 나열한 문구들이 있다고 하자. 가령, '제곱수', '짝수', '홀수', '허수', '초월수'... 등등 수많은 사례들이 있다. 이 목록들을 무조건 '글자수'가 적은 것부터 차례로 재배열한다. 글자수가 같으면 '가나다순'(알파벳순)으로 재배열한다. 그러면 다음처럼 재배열된다.

짝수 → 허수 → 홀수 → 제곱수 → 초월수... (2글자 우선, 가나다 우선)

여기에 다음처럼 아라비아 숫자로 번호표를 차례로 붙여 보자.

1: 짝수
2: 허수
3: 홀수
4: 제곱수
5: 초월수

1은 '첫째'라는 뜻인데 오른쪽 설명은 '짝수'다. 1은 당연히 '짝수'가 아니다. 2는 '둘째'라는 뜻인데 2는 '허수'가 아니다.
이렇게 비교를 해나가다 보니까, '3 = 홀수'와 '4 = 2의 제곱 = 제곱수'가 공교롭게도 번호와 설명이 일치했다.

그런데 여기서 3은 원래 '셋째'임을 가리키는 것이었지 '홀수'를 가리키기 위함이 아니었다. 여기서 4는 원래 '넷째'임을 가리키는 것이었지 '제곱수'를 가리키기 위함이 아니었다. 그러나 결과적으로 보면 3은 홀수가 맞고, 4도 제곱수가 맞다. 그건 '우연히' 맞아떨어진 것이다.

괴델은, 원래의 역할은 아니지만 우연히도 어떤 목적에 맞아떨어진 명제들의 특별한 조합을 발견했다.
그가 불완전성 정리를 구상할 때 영감을 받았다고 알려진 '리샤르 역설'을 잠깐 살펴보자. 수학자 쥘 리샤르가 제기했다.

모든 수들의 특징이나 정의를 1번부터 순서대로 쭉 나열했을 때

번호와 정의 내용이 일치하지 않으면 '리샤르 속성이 있다'고 본다. (리샤르 수라고 부름)
번호와 정의 내용이 일치하면 '리샤르 속성이 없다'고 본다. (리샤르 수가 아님)

예컨대 17번째로 정의한 수의 속성이 '소수, 즉 1과 자신으로만 나누어지는 자연수'라면,
번호인 17 역시 '소수'이므로 정의 내용과 일치한다.
정의 내용과 일치하면 리샤르 수가 아니라고 했다.
이렇게 우연히 일치하는 경우들도 있지만 대부분은 일치하지 않을 것이므로 리샤르 수인 경우가 훨씬 많을 것이다.

그러면 n번째 수는 리샤르 수일까, 아닐까?

n번째 수, 즉 n이 리샤르 수라면, n과 정의 내용(n은 리샤르 수)이 일치하게 되는데, 정의 내용이 일치하면 '리샤르 속성이 없는 수'(리샤르 수 아님)가 된다.
n번째 수가 리샤르 수가 아니라면, n과 정의 내용(n은 리샤르 수)이 불일치하게 되는데, 정의 내용이 일치하지 않으면 '리샤르 속성이 있는 수'(리샤르 수)가 된다.

이를 리샤르 역설이라고 부른다.

요점은 이것이다. <u>어떤 논리 체계의 규칙에 따라 도출되었으면서도 그 논리 체계의 규칙으로는 해명할 방법이 없는 경우가 발생한다.</u>

괴델은 이 특별한 사례를 찾았다. 괴델이 적용해본 아이디어는 다음과 같다.

1. 어떤 함수에서 어떤 값을 넣었을 때 나오는 값을 방금 전 함수에 다시 넣어보기. (찐 밥을 기계에 넣어 가래떡을 뽑은 다음 가래떡을 기계에 다시 넣음)
2. 이런저런 경우들을 시험해 보면서 함수에서 입력값과 출력값이 같아지는 특별한 경우를 찾아보기.

* 함수: 자판기처럼 어떤 값을 입력하면 일정한 방법으로 어떤 결과가 나오는 관계

르네상스 시대 화가들은 3차원 입체 공간을 2차원 평면에 표현하는 방법인 원근법을 알아냈다. 원근법을 활용하면 전혀 다른 속성을 지닌 공간과 평면이 한 곳에서 연결된다. 예컨대 '직선'은 2차원에서도 직선이고 3차원에서도 직선이다. 두 차원은 직선이라는 매개로 서로 연결된다. 괴델은 그런 방법을 사용한 것이다. 참 또는 거짓, 이 이분법의 논리로 견고하고 완벽한 논리 체계를 세우려던 수학자들의 꿈이 좌절되었다. 잊지 말아야 할 점은, 괴델은 기존 수학을 파괴하려는 것이 아니었다는 사실이다. 그가 기존 수학과 기존 논리학의 한계를 드러낸 결과 현대 수학은 훨씬 더 풍부하고 심오해졌다.

"저는 지금 거짓말을 하고 있어요."

이 사람의 말이 참이라면, 이 사람은 지금 거짓말을 하고 있다.
이 사람의 말이 거짓이라면, 이 사람은 지금 참을 말하는 것이다.

실은 두 맥락이 뒤엉켜서 모순처럼 보이는 것이고, 이해의 범위를 넓혀 보면 역설에서 벗어날 수 있다.
'참/거짓'의 '거짓'과 '거짓말'이라는 단어의 '거짓'이 다른 맥락에 있기 때문이다.

어떤 명제 안에 자기 자신을 언급하면서 부정하는 내용이 포함되면 역설이 발생한다.
"모든 크레타 사람은 거짓말쟁이다."라고 말한 크레타 사람의 사례에서 볼 수 있듯, 이 역설은 오랜 역사를 지녔다.
이와 비슷한 맥락에서 러셀은 '이발사의 역설'을 제시했다.

"마을에 한 명뿐인 이발사는 스스로 면도를 하지 않는 사람을 모두 면도해주는데, 자기 자신을 면도할 수 있을까 없을까?"

면도를 한다면 스스로 면도를 하는 것이니 안 되고, 면도를 안 한다면 스스로 면도를 하지 않는 사람에 해당하니 면도를 해야 하는 역설적인 상황에 빠진다. 러셀은 집합 개념에서도 이런 역설이 발생한다는 사실을 발견했다. 이런 명제들이 역설이 되는 까닭은 자기 자신에 대한 언급이 포함된 명제라서 그렇다.

"페르마의 마지막 정리는 증명 가능하다."라는 명제는 '페르마의 마지막 정리'라는 내용에 대한 내용이므로, 이런 명제를 메타명제라고 불렀다. 자기 자신을 언급하여 역설을 일으키는 이런 명제들은 메타명제의 특수한 종류다. 우리의 일상 언어와 일상의 표현들에는 일반명제와 메타명제가 마구 뒤섞여있다. 우리는 살아가면서 그 복잡한 두 맥락을 오가는 방법을 배우고 의사소통 과정에서 수없이 연습을 하게 된다. 그러고 나서 어느 정도 숙달이 되면 굳이 신경쓰지 않아도 그 둘을 구별할 수 있게 된다. 수학자들은 일반명제와 메타명제를 명확히 구별하지 않는 데서 논리적 오류도 생긴다고 생각했고, 이 둘을 분리하여 논리 체계의 허술함을 제거하려고 애를 썼다.

괴델은 일반명제와 메타명제로 구분할 필요가 없이, 똑같은 명제로 취급하는 방법을 찾았다. '소수'(素數, prime number)를 차례로 나열하고 서로 곱하여 고유한 번호를 매기는 방식의 '괴델수'를 고안한 것이다.

소수는 어떤 수의 최소 구성 요소가 되는 수로서 각기 독립적인 수다. 이 소수의 성질을 이용하여 곱셈을 하면 다른 수와 겹치지 않는 고유한 수를 얻을 수 있다. 이렇게 나온 수는 소수가 아닐 수도 있지만 다른 괴델수와는 겹치지는 않는다. 이런 고유한 결과값들을 '괴델수'라고 부른다. 가령 어떤 명제의 괴델수가 77이라면 소인수분해를 한 다음 7 x 11을 분석하면 된다. 77은 소수 7과 소수 11이 결합한 것이므로, 7이라고 미리 정의된 속성과 11이라고 미리 정의된 속성을 지닌 명제라는 의미가 된다. 괴델수를 만드는 과정이 암호화라고 하면 소인수분해를 하는 것은 그 암호 내용이 뭐였는지 알기 위한 복호화 과정이다. 모든 무수한 명제에 제각기 고유한 괴델수라는 이름표가 무수히 붙여지는 것이다. 서로 다른 명제가 서로 같은 괴델수인 경우는 없다. 우리가 생각할 수 있는 수학명제는 끝도 없이 많겠지만 걱정할 필요가 없다. 소수도 끝이 없기 때문이다. 소수가 무한하다는 것은 유클리드가 증명했지만, 어떤 규칙을 지니는지는 아직까지도 밝혀지지 않았다. (리만가설은 소수의 규칙성을 찾으려는 시도다.)

모든 수학명제는 괴델수로 모두 바꿀 수 있다. 괴델수를 분석하면서 그 명제들의 논리적 관계를 판단할 수 있고, 누가 보더라도 항상 똑같은 결과치를 얻을 수 있다. 어떤 물질을 분해하면 어느 원소(元素)들로 구성돼있는지 알 수 있는 것처럼, 어떤 괴델수가 어떤 수들의 결합(곱셈)으로 이루어져 있는지 분해하면(소인수분해: 소수들의 곱으로 재구성), 원래 명제의 구성 요소를 정확히 알 수 있다. 즉, 괴델수를 분석하면 원래 명제를 재구성할 수 있다.

$$0 = 0$$

이 수학명제에 해당하는 괴델수는 243,000,000이다. 괴델수는 단순해 보이는 명제도 이렇게 엄청나게 큰 수로 표현되는데 서로 겹치지 않는 유일한 수로 표현하려다보니 그렇게 됐다. 어마어마하게 큰 이 괴델수를 소수의 곱 형태로 다르게 표현할 수 있는데, 우리가 중학교 때부터 배우는 '소인수분해'가 그것이다. 이 괴델수 243,000,000을 소인수분해하면 $2^6 \times 3^5 \times 5^6$ 이 된다.

2, 3, 5 이런 소수들이 차례로 등장하고, 각 소수에는 거듭제곱이 돼 있다. 2, 3, 5에 해당하는 이 소수들은 명제의 뜻과는 무관하고, 명제를 정의할 때 필요한 항목이 3개라는 의미만 알려준다. 0 = 0 이런 수학명제가 성립하려면 0, =, 0 이렇게 3항목이 필요하다. 이 3항목을 표현하기 위해 소수가 3개 필요한데 2부터 시작하여 차례로 소수 3개가 나열된 것이다. 그러니까 0 = 0 이런 단순한 명제보다 복잡한 명제들을 정의하려면 소수가 4개 필요할 수도 있고 더 많이 필요할 수도 있다. 위에 붙은 6제곱, 5제곱, 6제곱이 바로 이 명제의 의미인 0, =, 0을 의미한다.

기호	괴델수	의미
~	1	아니다
∨	2	또는
⊃	3	· · ·라면 · · ·다
∃	4	· · ·이 존재한다
=	5	같다
0	6	영(0)
s	7	바로 다음 수
(	8	왼쪽 괄호
)	9	오른쪽 괄호
,	10	쉼표
+	11	더하기
×	12	곱하기

	변항	괴델수	대입 예
변수	x	13	0
	y	17	$s0$
	z	19	y
문장 변항	p	13^2	$0=0$
	q	17^2	(∃x)($x=sy$): y의 다음 수 x가 존재한다.
	r	19^2	$p \supset q$
술어 변항	P	13^3	$P(x)$: x는 소수이다.
	Q	17^3	
	R	19^3	

참조: 차라투 블로그(blog.zarathu.com)

수학명제를 괴델수로 바꾸기 위해 필요한 기본 약속을 표로 정리했다. (참조: 네이글/뉴먼, «괴델의 증명», 승산) 표를 보면 등호(=)는 '5'라는 괴델수로 바꾸어 표현할 수 있다. "0 = 0"을 괴델수로 바꾸려면 '0'에 대한 괴델수 6, 등호에 대한 괴델수 5, 다시 0에 대한 괴델수 6이 각 소수들의 지수 자리에 들어가서 $2^6 \times 3^5 \times 5^6$ 형태로 변환된다. 이걸 계산한 값이 "0 = 0"의 괴델수 243,000,000이다.

복습해 보자! 소수 위에 붙은 지수(거듭제곱)들의 의미를 다시 살펴보자. 이것이 바로 명제의 내용이라고 했다. 괴델수를 소인수분해하여 얻은 결과에서 나열된 소수들의 수가 명제를 정의할 때 필요한 기호들의 개수라면, 각 소수의 거듭제곱에 해당하는 수들은 명제의 내용에 해당한다.

다음은 괴델수 243,000,000을 소인수분해하여 얻는 결과였다.

$$2^6 \times 3^5 \times 5^6$$

이것을 분석해보면, 일단 원래 명제 정의에 필요한 항목이 3개라는 것을 알 수 있다. 각각의 소수 위에 붙은 거듭제곱이 명제 정의에 필요한 항목들 내용을 의미하는데, 2의 6제곱이니까 여기서 6은 우리가 약속한 어떤 기호를 의미하고, 3의 5제곱에서 5 역시 우리가 약속한 어떤 기호를 의미하며, 5의 6제곱에서 6도 우리가 약속한 어떤 기호를 의미할 것이다. (2의 6제곱에서 그 6과 동일) 우리가 약속한 것, 즉 괴델이 미리 정해둔 번역 기호들이 있다.

괴델이 논문에서 쓴 기본 기호는 7개이지만, 해설서에는 보통 12개 정도로 재설정하여 설명된다. 괴델의 원래 취지를 살리면서 조금 더 이해하기 좋게 설명하기 위해서라고 한다. (해설서마다 조금씩 다르다.) 표에 대입을 하면 명제가 수로 바뀐다. 명제를 수로 바꾸기 위해 다음처럼 약속한다.

아니다 → 괴델수 1 / 또는 → 괴델수 2 / ~라면 ~이다 → 괴델수 3 / ~이 존재한다 → 괴델수 4
같다 → 괴델수 5 / 영(O) → 괴델수 6 / 바로 다음 수 → 괴델수 7 / 왼쪽(여는) 괄호 → 괴델수 8
른쪽(닫는) 괄호 → 괴델수 9 / 쉼표 → 괴델수 10 / 더하기 → 괴델수 11 / 곱하기 → 괴델수 12

이 기본 약속을 바탕으로 "0 = 0"이라는 수학명제가 $2^6 \times 3^5 \times 5^6$ 으로 바뀌고 괴델수가 된다. 즉, 243,000,000이라는 괴델수를 얻게 되는데 이것을 거꾸로 분석하면 원래 명제를 복원할 수 있다. 즉, 소인수분해를 하면 된다. 다음은 그 과정이다.

A	243,000,000
B	$64 \times 243 \times 15{,}625$
C	$2^6 \times 3^5 \times 5^6$
D	6 5 6 ↓ ↓ ↓ 0 = 0
E	0 = 0

기호	괴델수	의미
~	1	아니다
$\vee$	2	또는
$\supset$	3	…라면 …다
$\exists$	4	…이 존재한다
=	5	같다
0	6	영(0)
s	7	바로 다음 수
(	8	왼쪽 괄호
)	9	오른쪽 괄호
,	10	쉼표
+	11	더하기
$\times$	12	곱하기

	변항	괴델수	대입 예
변수	x	13	0
	y	17	$s0$
	z	19	y
문장 변항	p	13^2	$0 = 0$
	q	17^2	$(\exists x)(x = sy)$: y의 다음 수 x가 존재한다.
	r	19^2	$p \supset q$
술어 변항	P	13^3	$P(x)$: x는 소수이다.
	Q	17^3	
	R	19^3	

기호의 종류를 조금 더 설명해야 할 것 같다. 명제를 표현하기 위해서는 특정값을 가리키는 기호와 불특정값을 가리키는 기호, 두 종류가 필요하다. '1 = 1'이라는 등식은 괴델수 1부터 12까지 정해둔 기본 도표로 표현 가능하다.

그렇지만 'x = 1'이라는 방정식은 미지수 x 같은 새로운 기호가 필요하다. 함수를 표현하려면 변수가 필요하다. x가 미지수인지 변수인지 구분하지 않아도 된다. 괴델수를 소인수분해하여 원래 식으로 변환하면 그 식이 방정식인지 함수인지 알 수 있고, 그러면 x가 미지수인지 변수인지 알 수 있기 때문이다. 피타고라스 정리를 표현하려면 x, y, z 또는 a, b, c 뭐라고 표기하든 변수는 3개가 필요할 것이다. 이럴 때는 13부터 차례로 17, 19... 이렇게 필요한 변수의 개수만큼 그다음 소수들을 괴델수로 사용한다.

그리고, 숫자가 아니라 문장 전체(명제)를 기호로 대체하는 경우가 있다. '0 = 0'을 p로 대체하거나, 'p라면q이다'를 r로 대체하는 경우가 그 예다. 이럴 때는 13부터 필요한 문장 개수만큼 소수를 사용하되 지수 자리를 제곱으로 표시하여 괴델수로 사용한다.

다음으로, 'x는 소수이다'처럼 어떤 수의 성질을 규정해야 하는 경우가 있다. 이럴 때는 필요한 만큼 13부터 소수를 사용하되 지수 자리에 3제곱을 하여 괴델수로 사용한다.

괴델수를 표현하기 위한 기호들은 모두 준비됐다. 정리하자면, 괴델이 사용한 기호들을 크게 2종류로 나눌 수 있고, 둘째 부류는 다시 3가지로 나눌 수 있다.

1. 기본 기호들 12가지
2. 어떤 값이 들어갈 수 있는 변수 기호들 3가지

    - 1) 숫자가 들어가는 빈자리를 표현하는 기호들
    - 2) 문장이 들어가는 빈자리를 표현하는 기호들
    - 3) 술어가 들어가는 빈자리를 표현하는 기호들

y 다음 수 x가 존재한다.

그렇게 복잡해보이지 않는 명제인데도 이 명제를 괴델수로 바꾸려면 여러 항목들이 필요하다. 'y'(어떤 것이든 들어갈 수 있는 자리를 표현한 기호, 변수)라는 항목이 우선 필요하고 'x'(어떤 것이든 들어갈 수 있는 자리를 표현한 기호, 변수)도 필요하고, '다음 수', '존재한다' 같은 항목도 필요하며 그 항목들을 구분해주는 괄호들도 필요하다. 필요한 항목, 즉 필요한 소수들이 10개가 있어야 하는데 이 명제에 해당하는 괴델수는 다음과 같은 요소들로 이루어진다. 즉, 그 괴델수를 소인수분해하면 다음처럼 분석할 수 있다.

$$2^8 \times 3^4 \times 5^{13} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{13} \times 17^5 \times 19^7 \times 23^{17} \times 29^9$$

2부터 시작하는 소수가 10개가 있으니 명제 표현에 필요한 기호가 10개임을 알 수 있고, 각 소수에 붙은 제곱들 8, 4, 13, 9, 8... 등으로 각 기호의 역할을 알 수 있다. 즉 명제 뜻을 알 수 있다. "y 다음 수 x가 존재한다."는 아래처럼 기호로 표현할 수 있다.

(	∃	x	)	(	x	=	s	y	)
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
8	4	13	9	8	13	5	7	17	9

명제가 복잡할수록 괴델수 자체는 어마어마하게 큰 수로 표시될 것이며 소인수분해도 조금은 어려워질 것이다. 그러나 모든 괴델수는 아무리 큰 수도 모두 소인수분해가 가능하다. 요점은 이것이다. "어떤 수학명제든 소수의 성질을 활용하면 고유한 괴델수로 모두 바꿀 수 있다."

*** 실습을 또 해 보자. "x = 1"이라는 명제는 괴델수로 어떻게 표현할 수 있을까?

처음에 가장 기본적인 약속을 해두었다. 기본 기호들에 괴델수를 미리 할당해두었다.

수를 대체하는 기호인 변수 x는 괴델수가 13이다. 등호는 괴델수가 5다. '1'을 따로 기호로 규정하지는 않았다. '0과' '바로 다음 수'라는 두 항목을 가지고서 모든 자연수를 표현할 수 있기 때문이다. '1'은 '0 바로 다음 수'이고 '2'는 '0 바로 다음 수 바로 다음 수'다. 즉 1은 s0이라고 표현 가능하고 2는 ss0으로 표현 가능하다. 여기서는 1이므로 s0인데 s의 괴델수는 7이고 0의 괴델수는 6이다. 따라서 'x = 1'에서 기호가 3개 필요한 것처럼 보이지만 실제로는 4개가 필요하다. 괴델수를 만들려면 필요한 항목에 필요한 만큼 소수를 차례로 늘어놓아야 한다. 따라서 2부터 소수들을 차례로 열거하면 2, 3, 5, 7이 필요하다. 이제 각 소수에 거듭제곱을 하여 기호 속성을 표현해 보자. 2에는 13제곱을 하고, 3에는 5제곱을 하고, 5에는 7제곱을 하고, 7에는 6제곱을 하여 이것들을 서로 곱하면 x = 1이라는 명제의 괴델수가 나온다. 여기서 실제값을 계산할 필요는 없다. 어떤 고유한 큰 수가 나온다는 점만 알면 된다.

중요한 점은 그 커다란 수를 다시 소인수분해하이 $2^{13} \times 3^5 \times 5^7 \times 7^6$ 이 나오게 된다는 것이다.

그러면 곱해진 항목이 4개이니까 기호가 4개라는 점을 알 수 있고 13, 5, 7, 6을 각각 원래 약속된 기호표에서 찾아보면 13은 변수 x, 5는 등호 =, 7은 바로 다음 수 s, 6은 0임을 알 수 있다. 따라서 원래 명제는 x = s0 즉 x = 1 이라는 것을 알 수 있다.

어떤 주어진 명제에 관해 다시 언급하는 명제를 '메타명제'라고 한다. 자기 자신을 언급하는 메타명제는 때로 모순과 역설을 일으키기도 한다. 괴델은 메타명제를 논의에서 배제하지 않고, 모든 종류의 수학명제를 한 종류인 수로 모두 바꾸어 서로 계산할 수 있는 법을 고안했다. 그렇게 고안된 방법이 괴델수다. 괴델은 그 과정에서 참이면서도 증명은 불가능한 명제가 있다는 것을 입증했다.

'누구나 참여 가능'한 오디션에서, 참가자들 중에 한 사람이 오디션 심사도 보면 어떤 일이 벌어질까? 누구나 참여가능하다는 규정에 위배되지는 않지만, 자기 자신을 심사해야 하는 이상한 상황이 벌어진다. 비유적인 이 오디션의 상황을 다음처럼 표현해 본다.

> 심사위원을 겸하는 참가번호 G번 참가자가 무대에 나올 수 있다.
> 그러지 말라는 법은 없지만 공정하고 올바른 심사는 불가능할 것 같다.

오디션이라는 특수한 상황이 아닌 좀 더 일반적인 상황으로 고쳐서 표현해보겠다.

> 어떤 명제 안에 그 명제와 같은 것을 뜻하는 어떤 항목이 다시 나온다면,
> 명제가 성립하기는 해도 그것이 옳다고 증명하는 건 불가능할 것 같다.

정확히는 모르지만 느낌은 얼추 오디션 상황과 비슷해보인다. 들쭉날쭉한 메타명제들을 종류가 동일한 일관된 수학명제들로 모두 바꾼 증명 단계의 마지막에 이르면, 어떤 멀쩡한 수학명제가 스스로 '나에 대한 증명법은 없다'고 선언하는 것을 보게 될 것이다. 앞서 말했듯 우리가 찾고자 하는 명제를 G라고 부른다. '괴델수'의 첫글자를 딴 것이다. G의 내용은 다음과 같았다.

> G: G는 증명 불가능하다.
>
> - G가 거짓이라면?
> G는 증명 가능. 그런데 G의 원래 내용이 'G는 증명 불가능하다'였으므로 '<G는 증명 불가능하다>는 증명 가능하다.'가 된다.
> 같은 대상에 대해 증명 가능과 증명 불가능이 동시에 성립할 수는 없으므로 논리 모순이다.
>
> - G가 참이라면?
> G는 증명 불가능. G는 참이면서도 증명은 불가능. (논리 모순은 아니지만 논리적 불완전성을 의미한다.)
>
> 이것을 종합하면 '참'은 '논리적 증명 가능성'보다 더 넓은 개념이라는 것이 암시된다.

기호들이 규칙에 따라 연결된 문장을 형식문 또는 논리식이라고 한다. 참거짓을 판단하기 전 단계에서 우선 형식을 제대로 갖추었다는 의미다. "내 이름은 이강룡이다" 또는 "이강룡이다 내 이름은"은 정상적인 형식을 갖춘 한국어 문장이다. 그런데 "이다 이강룡 내"는 한글로 작성됐다 할지라도 올바른 한국어 문장 형식이 아니다. 기호들이 단순히 모여있다고 해서 다 식은 아니고, 문장이 성립하기 위한 최소 조건은 갖추어야 한다.

'~(0 = 0)'은 '0은 0이 아니다'라고 주장하는 식이다. '0 = 0'이라는 식에 해당하는 괴델수도 있고, '~(0 = 0)'이라는 식에 해당하는 괴델수도 있다. 상반되는 식의 형식이라서 둘 다 참일 수는 없지만, 둘 다 일단 형식은 제대로 갖춘 식이므로 각기 고유한 괴델수가 부여된다. '~(0 = 0)'을 관찰하면 다음과 같은 메타명제가 가능하다. 메타명제는 참일 수도 있고 거짓일 수도 있으며, 참인지 거짓인지 판단하기 어려운 경우도 있다. 참인 메타명제를 하나 보자.

'~(0 = 0)'의 첫 기호는 물결표다.

(어떤 명제에 관해 다시 말하는 명제를 '메타명제'라고 한다. '첫 기호'라는 구절이 나왔을 때 그 앞으로 되돌아가서 읽어야 한다.)

다음 명제를 한번 보라. 똑같은 내용인데 형식을 달리 표현했다.

2^1 은 a의 인수이지만 2^2 은 a의 인수가 아니다. (이 명제 내용을 이해하기 위해 앞으로 되돌아가서 참조할 필요가 없다.)

첫 번째 기호가 물결표라는 것은 이 명제에 대한 괴델수를 소인수분해했을 때 곱해지는 첫 번째 수가 2의 1제곱임을 의미한다.

* 괴델수 만들기: 1. 기호의 개수 셈 → 2. 개수에 해당하는 소수를 나열(2, 3, 5, 7...) → 3. 해당 기호의 괴델수를 각 소수들에 대응하여 거듭제곱함 → 4. 그 수들을 서로 곱함

기호	괴델수	의미
~	1	아니다
∨	2	또는
⊃	3	· · ·라면 · · ·다
∃	4	· · ·이 존재한다

물결표(~)에 처음 할당되었던 괴델수는 1이다.

~의 괴델수가 1이므로 ~가 식에 첫 번째 기호로 나오면 반드시 2의 1제곱이 소인수분해의 첫 항목으로 곱해진다. 예컨대 $2^1 \times 3^n \ldots$ 같은 형식이 된다. 따라서 그 명제의 괴델수가 a라면, 원래의 메타명제는 다음 표현으로 대체 가능하다. 표현은 달라도 의미는 같다.

2^1 은 a의 인수이지만 2^2 은 a의 인수가 아니다. 중요한 점은, 메타명제 형식을 빌리지 않고서도 수의 관계를 활용하여 어떤 대상에 대해 말할 수 있다는 사실이다.

'y = 2x + 1'이라는 함수는 x 자리에 어떤 값을 입력하면 x에 2를 곱한 다음 1을 더한 값이 출력된다는 뜻을 나타낸다. '함수'가 바로 그런 뜻을 지닌 용어다. 어떤 값에 일정하게 대응하는 다른 어떤 값이 항상 있다는 말이다. 불완전성 정리에 사용된 기호들도 일종의 함수다. 즉, 수들 사이의 일정한 상관 관계를 표현한다.

"y 다음 수인 x가 존재한다."를 식으로 바꾸면 (∃x)(x = sy)가 된다.

기호	괴델수	의미
$\sim$	1	아니다
$\vee$	2	또는
$\supset$	3	···라면 ···다
$\exists$	4	···이 존재한다
$=$	5	같다
0	6	영(0)
s	7	바로 다음 수
(	8	왼쪽 괄호
)	9	오른쪽 괄호
,	10	쉼표
$+$	11	더하기
$\times$	12	곱하기

	변항	괴델수	대입 예
변수	x	13	0
	y	17	$s0$
	z	19	y
문장 변항	p	13^2	$0 = 0$
	q	17^2	(∃x)($x = sy$): y의 다음 수 x가 존재한다.
	r	19^2	$p \supset q$
술어 변항	P	13^3	$P(x)$: x는 소수이다.
	Q	17^3	
	R	19^3	

각 기호들에 해당하는 괴델수가 있다.

(	∃	x	)	(	x	=	s	y	)
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
8	4	13	9	8	13	5	7	17	9

기호에 해당하는 괴델수를 일단 확인한 다음, 괴델수가 10개니까 2부터 차례로 소수 10개를 나열한 다음,
그 각각의 소수들에 1:1로 대응하는 각 기호에 해당하는 괴델수를 거듭제곱하면,

$$2^8 \times 3^4 \times 5^{13} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{13} \times 17^5 \times 19^7 \times 23^{17} \times 29^9$$

이렇게 되는데 이것을 계산한 값이 "y 다음 수인 x가 존재한다."라는 일반명제를 식으로 바꾼 다음에 계산한 고유한 괴델수다. 그 괴델수는 일일이 적기에 번거로운 아주 큰 수가 될 테니까 m이라고 간략히 표기하겠다.

기본 기호 중에 y는 숫자를 대신하는 변수로 규정되었다. y에는 숫자가 대신 들어갈 수 있다. (∃x)(x = sy)의 y에 숫자를 넣어보자.
숫자 0을 넣으면 (∃x)(x = s0)이 되는데 그렇게 해서 계산돼 나오는 괴델수를 n이라고 하자.

(계산하면 147,573,952,589,676,412,927 같은 자연수가 나올 텐데, 그것을 일일이 적으면 너무 길고 번거로우니까 간략한 알파벳 기호로 대체하는 것이다.)

(∃x)(x = sy) → 이 식의 괴델수는 m이라고 하자.
(∃x)(x = s0) → 이 식의 괴델수는 n이라고 하자.

y 다음 수인 x가 존재하므로, 0 다음 수도 존재한다는 간단한 증명이다. 이 두 줄짜리 증명 역시 괴델수로 표현 가능한데, 각각의 명제를 서로 곱하면 된다. 나중에 이 수를 소인수분해하면 증명 내용을 쉽게 알 수 있다. 증명에 필요한 식이 2개이므로 소수 2와 3이 필요하다. 그리고 내용에 해당하는 m과 n을 각각 지수자리에 거듭제곱으로 표시한 다음, 그렇게 각각 계산된 두 수를 곱하면 증명의 괴델수가 된다. 그 괴델수를 k라고 하자.

$$k = 2^m \times 3^n$$

증명이 복잡해지면 식의 수가 많아질 텐데, 많아지면 많아지는 대로 소수를 늘려서 서로 곱하고 각 소수에 거듭제곱을 해나가면 각각의 괴델수를 다 구할 수 있다. k와 m, 또는 k와 n의 관계를 생각해 보자. 서로 일정한 산술적 관계를 맺고 있다.

(∃x)(x = sy)는 m이라는 괴델수를 갖고 있었다. 숫자가 들어갈 수 있는 y에 0을 포함하여 어떤 수든 들어갈 수 있는데, 자신의 괴델수인 m을 넣어 보자.

"괴델수 m을 가진 식에서 괴델수 17인 변수에, 괴델수 m에 해당하는 자연수를 대입해서 만들어진 식"

그 괴델수는 m이라는 수와 17의 관계로 설명될 수 있는 수다. 어떤 규칙에 따른 관계를 수학에서는 '함수'라고 부르는데, m과 17은 서로 함수 관계에 있다. 그 함수 관계가 어떤 특정한 수를 만들고, 그 수를 원래의 함수에 그대로 다시 넣어볼 수 있다. 괴델수를 원래 함수에 넣으면 새 괴델수가 나오는데 이런 관계를 'Sub'라는 함수로 표현한다. 예컨대 Sub(m, 17, m)이라고 표기할 수 있다. sub(m, 17, m)이라고 s를 소문자로 적으면 '괴델수'를 의미한다. (수식을 표기할 때는 안 나오며, 의미상 구분하기 위함이다.) substitution(대체)에서 따온 기호인 Sub는 뭔가 다른 것으로 대체한다는 뜻이다. 앞서 (∃x)(x = sy)이라는 식이 m이라는 괴델수를 갖고 있었는데, 이 식의 변수인 y(괴델수: 17) 자리에 자신의 괴델수 m을 넣어본 것이고, 그 과정을 새로운 함수 표현인 Sub(m, 17, m)이라고 적은 것이다.

증명에 관한 함수는 Dem으로 표기한다. 예컨대 소수들의 곱으로 이루어진 '괴델수'와 소인수분해 후의 인수는 연산으로 연결돼 있으므로 함수 관계를 맺고 있다. 기호 Dem은 Demonstration(증명)에서 따온 것으로서 '~에 대한 증명'임을 가리키는 함수 기호다. Dem(x, z)의 x와 z 사이에도 당연히 산술적 관계인 함수 관계가 존재하는 것이다. 다음과 같은 식이 가능하다.

~(∃x)Dem(x, Sub(y, 17, y))

** 의미: 어떤 명제의 괴델수가 y일 때 괴델수가 17인 변수를 괴델수 y(자연수)로 대체한다면 그것에 대한 증명 x는 존재하지 않는다.

우리는 지금 참인 명제이면서도 증명은 존재하지 않는 특수한 경우를 찾고 있는 중이다.
반대로, 거짓 명제이면서 증명이 존재하는 경우를 가정해 볼 수 있는데 그것은 거짓이면서 참(증명 가능)이라는 모순이 일어나므로 논의에서 배제한다.

위의 식에서 y가 과연 어떤 괴델수를 취해야 최종 결과를 확인할 수 있을까?
위의 식에 대한 괴델수가 p일 때, 이 p를 다시 y 자리에 넣어 보면 신기한 일이 일어난다. 넣어 보자.

~(∃x)Dem(x, Sub(p, 17, p))

이제 우리가 찾던 명제가 나왔는데 이 명제를 대문자 G라고 하고, 이 명제에 대한 괴델수를 소문자 g라고 하자. 방금 우리는 다음처럼 변경을 했다.

~(∃x)Dem(x, Sub(y, 17, y)) → ~(∃x)Dem(x, Sub(p, 17, p))

G: ~(∃x)Dem(x, Sub(p, 17, p))
** 의미: 괴델수가 sub(p, 17, p)인 명제에 대한 증명(x)은 존재하지 않는다.

우리가 했던 작업을 되짚어 보자. 우리는 괴델수가 p인 아래 왼쪽 식에서 y 대신 p를 대입하여 오른쪽 식으로 바꾸었다.

~(∃x)Dem(x, Sub(y, 17, y)) → ~(∃x)Dem(x, Sub(p, 17, p))

우리가 G라고 이름을 붙인 오른쪽 식은 왼쪽 식에서 y만 p로 바꾼 것이다. 즉,
괴델수가 p인 식에서 변수 y를 p로 대체한 식이다.
이제 두 식의 관계가 아니라,
함수 Sub(p, 17, p)의 사전적 정의만 보자.
괴델수가 p인 식에서 변수 y를 p로 대체한 식이다. (괴델수 17은 변수다.)

위 설명에서 두 노랑띠 부분이 똑같다. 노랑띠 내용을 비교해 보자.

명제 G는
괴델수가 p인 식에서 y를 p로 대체한 식이다.
Sub(p, 17, p)는
괴델수가 p인 식에서 y를 p로 대체한 식이다.
따라서 "명제 G와 Sub(p, 17, p)도 같다."

G: ~(∃x)Dem(x, Sub(p, 17, p))
G: 명제 Sub(p, 17, p)에 대한 증명 x는 존재하지 않는다. (명제 G = Sub(p, 17, p))

여러 추론 과정을 거쳐 논리적으로 도출된 명제 G의 결론: 괴델수가 sub(p, 17, p)인 명제 Sub(p, 17, p) 또는 자기 자신에 대한 증명의 괴델수 x가 존재하지 않는다.
G: G는 증명 불가능하다.

지금까지 살펴본 내용이 괴델의 제1 불완전성 정리다.

제2 불완전성 정리는 제1 불완전성 정리에서 도출되는 것으로서, 논리 체계 전체로 확장된 결론이다. 제1 불완전성 정리로 참인데도 증명할 수 없는 명제가 항상 있다는 점을 밝혔다면, 제2 불완전성 정리는 해당 논리 체계에 모순되는 점이 전혀 없다는 점을 그 체계 안에서 그 자체로 입증할 수 있는 방법이 없다는 점을 밝혔다. G가 증명불가능한 명제라면, G를 포함하는 체계 전체가 모순이 없다는 것을 체계 자체에서 확인할 길이 없다. 일반화하면, 수학에 모순이 없다는 점을 우리는 알 수 없다.

이로써 완전무결한 논리 체계 구축이라는 힐베르트의 이상은 실현 가능하지 않다는 점을 알게 되었다.
불완전성 정리의 계기로 기존 수학 체계가 무너진 것이 아니라 새로운 수학 세계가 열렸다고 봐야 할 것이다.

괴델은 칸토어가 사용했던 '대각선 논법'의 아이디어를 불완전성 정리 증명에 적용했는데 그 아이디어를 살펴본다.

칸토어 이전에는 무한한 것은 다 똑같다고 생각했다. 자연수 집합도 무한하고, 유리수 집합도 무한하며, 실수 집합도 무한하다. 칸토어는 무한집합이라고 해서 다 같은 것은 아니라는 점을 알아냈다. 어떤 무한집합보다 더 큰 무한집합이 있다는 것이다.

자연수와 정수 중에 더 큰 집합은 뭘까? 얼핏 0과 음수까지 포함되는 정수가 더 큰 집합이라고 생각하기 쉽다.

먼저 자연수를 무한히 나열해 보자.
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...

여기에 정수를 하나씩 무한히 대응시켜 보자.
1 = 0
2 = -1, 3 = +1
4 = -2, 5 = +2
6 = -3, 7 = +3
8 = -4, 9 = +4 ...

둘 다 무한집합이니까 항상 1:1 대응이 가능하다. 그렇다면 두 집합의 크기(조밀함)는 같은 것이다. 칸토어는 자연수, 정수, 유리수가 모두 서로 1:1 대응이 가능한 무한집합이라는 점을 알아냈다. 즉, 셀 수 있는 무한집합이다.

그런데 무리수가 포함된 실수는 달랐다. 실수의 집합 크기가 훨씬 더 컸다. 자연수 집합으로 아무리 1:1 대응을 하려고 해도 항상 새로운 실수들이 발견됐다. 서로 짝을 모두 지었을 때 짝 없는 솔로들이 남는 집합이 더 큰 집합일 것이다. 실수는 셀 수 없는 무한집합이었다.

칸토어가 자연수 집합과 실수 집합을 비교하며 실수 집합의 크기가 더 크다는 것을 밝혔을 때 사용한 방법이 '대각선 논법'이다. 빈틈이 없이 위에서 아래로 빽빽하게 모두 나열된 수의 집합이 있다고 가정할 때, 왼쪽 위에서 오른쪽 아래로 대각선을 그어서 수들을 하나씩 뽑아내면 새로운 수를 만들 수 있다. 그러면 '빈틈이 없이 모두 나열'한다는 가정이 틀린 것이 되어서 그 집합은 빈틈 없이 모두 나열하는 것이 불가능하다는 점을 입증할 수 있다.

** 대각선 논법:

자연수는 1부터 2, 3, 4, 5, 6, ... 이렇게 빈틈이 없이 차례로 모두 나열할 수 있다. 1과 2 사이에, 2와 3 사이에 다른 자연수가 들어가지 못한다. 이 원리를 실수에도 적용하여, 어떤 두 실수 사이에 다른 실수가 들어갈 빈틈이 없도록 빼곡하게 차례로 모두 나열할 수 있다고 가정해 보자. 만일 이렇게 했는데도, 실수들이 새롭게 발견된다면 실수를 모두 나열할 수 있다는 가정은 틀린 것이다. 가정이 틀렸다면 실수는 셀 수 없는 무한집합이다.

모든 실수가 다음처럼 나열돼 있다고 가정해 보자. 즉, 123456789 와 234567890 사이에 다른 실수는 없다고 가정하자.

123456789
234567890
345678901
456789012
567890123
678901234
789012345
890123456
901234567

첫째 수에서 왼쪽 첫째 자리 수인 1을 뽑아낸 다음 1을 더하여 2를 만든다.
둘째 수에서 왼쪽 둘째 자리 수인 3을 뽑아낸 다음 1을 더하여 4를 만든다.
셋째 수에서 왼쪽 셋째 자리 수인 5를 뽑아낸 다음 1을 더하여 6을 만든다. ...

이렇게 대각선으로 뽑아낸 수들을 나열하면 246802468 이 된다.
이 수는 첫째 수인 123456789와 다른 수다.
둘째 수인 234567890 과도 다른 수다.
기존의 어떤 수들과도 같지 않다.
왜냐면 적어도 자릿수 하나는 다르기 때문이다.

다시 정리하면,

모든 실수를 1행, 2행, 3행, ... 이렇게 빼곡하게 위에서 아래로 차례로 모두 나열했다고 가정한다.
1행의 첫째 자리수를 확인하고 1만큼 더 큰 수를 뽑아둔다. (첫째 자리수가 2라면 '3'을 뽑아낸다.)
2행의 둘째 자리수를 확인하고 1만큼 더 큰 수를 뽑아둔다. (둘째 자리수가 3이라면 '4'를 뽑아낸다.)
3행의 셋째 자리수를 확인하고 1만큼 더 큰 수를 뽑아둔다. (셋째 자리수가 4라면 '5'를 뽑아낸다.)
....

이렇게 왼쪽 위 첫째 자리수부터 저 오른쪽 아래까지 '대각선'으로 숫자들을 뽑았는데, 그렇게 뽑아낸 수들(3, 4, 5, ...)을 각 자리수에 맞게 배열하여 새로운 실수를 만든다.

이렇게 만든 수는 나열된 실수 목록의 1행에 있는 수와 적어도 자리수 하나는 다르기 때문에 같은 수가 아니다.
이 수는 둘째 수(2행의 수)와 적어도 자리수 하나는 다르기 때문에 같은 수가 아니다.
이 수는 셋째 수(3행의 수)와 적어도 자리수 하나는 다르기 때문에 같은 수가 아니다.
...

따라서 이 수는 '빈틈이 없이 빼곡하게 나열한 기존의 실수'와 다른 새로운 실수다.
이런 수는 얼마든지 새롭게 찾아낼 수 있으며, 실수를 차례로 모두 나열할 수 있다는 우리의 최초 가정은 틀렸다.
따라서 실수는 우리가 미리 그 목록을 '확정'할 수 없는 셀 수 없는 무한집합인 것이다. 실수 집합은 자연수 집합보다 크다.

자연수, 정수, 유리수 같은 무한집합은 우리가 목록을 빼곡하게 나열할 수 있는 '셀 수 있는' 무한집합이지만, 실수 같은 무한집합은 우리가 목록을 빼곡하게 나열할 수 없는 '셀 수 없는' 무한집합이다. 실수 집합이 자연수 집합보다 크다는 점을 알아낸 칸토어는 또 다른 의문이 생겼다.

그러면 자연수 집합보다는 크고, 실수 집합보다는 작은 무한집합은 존재할까? 칸토어는 존재하지 않을 것이라고 추정했고 이것을 '연속체 가설'이라고 부른다. 칸토어 사후에도 연속체 가설은 쉽게 입증되지 못했다.

그러다가 1938년에 쿠르트 괴델은 기존 수학 체계로는 연속체 가설이 거짓이라는 점을 입증할 수 없음을 알아냈다. 참이라는 것을 아직 알지는 못하지만 적어도 '거짓'은 아니라는 것까지 알아냈다. 연속체 가설을 참이라고 받아들여도 수학 체계에는 모순이 생기지 않는다. 1963년에 폴 코언은 한 단계 훌쩍 도약하여, 연속체 가설이 참이라는 사실도 입증할 수 없음을 밝혔다. 즉, 거짓이라고 받아들여도 모순이 생기지 않는다는 것이다. 연속체 가설은 참인지 거짓인지는 결정할 수 없는 상태가 되었다. 수학에는 결정 불가능한 문제들이 존재한다. '진리'는 열린 상태로 우리 앞에 놓이게 되었다.

더 자세히 공부하고자 한다면, 다음 자료들을 참조하기 바란다.

* 불완전성 정리를 해설한 문서: (아래 순서로 읽으면 좋음)

- 짐 홀트, ≪괴델이 아인슈타인과 함께 걸을 때≫, 소소, 2021. (불완전성 정리 이야기는 별로 없지만, 시대 분위기 파악에 좋음)
- 레베카 골드스타인, 고중숙(옮김), ≪불완전성: 쿠르트 괴델의 증명과 역설≫, 승산, 2007. (흥미를 자극하는 철학적 해설서, 풍부하고 친절한 설명, 증명 파트는 좀 어렵다.)
- 정계섭, <수학적 참과 증명가능성> 논문. (역사적 맥락부터 실제 증명 과정까지 일목요연함, 이 문서로 바로 진입하여 여러 번 정독하는 것도 좋은 방법)
- 차라투 블로그(blog.zarathu.com), "괴델의 불완전성 정리" (이 글만 바로 읽지 말고, 위 논문 내용을 숙지한 상태에서 간략히 복습하면 좋음)
- 어니스트 네이글/제임스 뉴먼(지음), 곽강제 등(옮김), ≪괴델의 증명≫, 승산, 2010. (대략적인 증명 흐름을 이해한 다음 읽을 것, 증명 파트에 대한 설명이 너무 짧다.)

* 불완전성 정리를 응용한 책:

- 더글러스 호프스태터(지음), 박여성·안병서(옮김), ≪괴델, 에셔, 바흐≫, 까치, 2017. (저자가 불완전성 정리에 영감을 받아 쓰기 시작한 책. 저자 호프스태터는 위에서 언급한 해설서인 <괴델의 증명> 개정판 서문을 쓰기도 했음. 너무 어렵고 방대하지만 그러하기에 풍부한 영감을 제공하는 책. 이해되는 만큼만 읽겠다고 접근하면 더없이 재미있는 책.)

작성일: 2022. 6. 8. 최종 수정일: 2025. 5. 21.

** 주요 수정 사항 이력

2025. 5. 18. 변항 3종류에 대한 해설 수정보완 / 2025. 5. 10. '연속체 가설'에 대한 해설 추가 / 2025. 5. 8. '리샤르 역설' 해설 보완 / 2025. 3. 15. "이 문장은 증명 불가능하다."가 거짓인 경우의 설명을 보완함. '<이 문장은 증명 불가능하다>는 증명 가능하다'로 이해하면 더 좋다. 그러면 반대 상황이 동시에 성립하므로 모순임이 더 잘 드러난다. / 2025. 2. 16. Sub(y, 17, y)가 Sub(n, 17, n)으로 전환되는 과정 설명 보완. Sub 함수에서 첫째 y는 아직 미정인 어떤 명제의 괴델수, 17은 명제 안의 변수, 둘째 y는 자연수로 표현되는 괴델수. 첫째 y를 '괴델수 17인 명제'라고 이해하면 안 된다.